

A ZSONGLÓRKÖDÉS FIZIKÁJA

Varga János
Székesfehérvár

Mottó: „Meggyőződésem, hogy a tudomány szakmákra, szakterületekre való felosztása az osztályozó emberi elme ugyan szükségszerű, de mesterséges terméke. A természet nem ismeri az ilyen szakosítást.”

Szalay Sándor

A matematika csupán számokkal való zsonglőrködés, a fizika képletekkel való bűvészkedés, a kémia meg csak kémcsövekben való kotyvasztás – hangoztatják a gondolkodni restek. E mondás a zsonglőrködést a matematikához köti. Amennyiben néhány összeadás és kivonás maga a matematika, annyiban ezt a felfogást erősíti az alábbi [1]-ből vett feladat és annak megoldása is.

F.60. *Jani és Juliska édesapja szomorúan bandukolt haza, ugyanis nem tudott venni egyebet, mint*

két darab tojást. Egy olyan régi fabídhöz ért, amelyre ki volt írva, hogy 70 kg-nál nagyobb tömeget nem bír el. Elgondolkozott a jó öreg:

– Én pontosan 69,950 kg tömegű vagyok, a tojások meg egyenként 50 g tömegűek. Még ezt a két tojást sem tudom épségben hazavinni gyermekeimnek – búslakodott szomorúan.

Hamarosan azonban mentő ötlete támadt, és épen hazavitte a két tojást anélkül, hogy a bíd leszakadt volna. Pontosán egyszer baladt át a hídon, és senki sem segített neki. Vajon hogy tette ezt?

Az egyik fizikaórán tanítványaimnak én is feladtam a fenti példát, mert alkalmasnak találtam az önálló tanulói kutatásra, számolásra és mérésre, amin az egész osztály együtt gondolkozhat és dolgozhat,

arra, hogy tanárként „felülről nézve és a háttérből irányítva” figyelhessem tanítványaim munkáját, ki hogyan közelíti meg a problémát, milyen gondolkodásmódot alkalmaz. Én magam csupán, mint moderátor próbáltam közreműködni, a „brain storming” (ötlet-roham) módszert alkalmazva.

Ötletek a józan ész jegyében

Mintegy megérezve a feladatban lévő játékosságot, tanítványaim először a mindennapi logikát használták. Szinte záporoztak az ötletesebbnél ötletesebb javaslatok. Volt, aki azt javasolta, hogy az apa vágjon le a hajából annyit, mint a két tojás tömege, mások valamilyen ruhadarabtól – például kabát stb. – akarták megszabadítani, vagy azt javasolták, hogy dobja át a folyón a cipőit, és mivel azok biztosan nehezebbek, mint egy tojás, így meztláb a két tojással a híd leszakadásának veszélye nélkül könnyedén át tud menni a hídon. Bár a feladat eredeti kiírása nem tartalmaz a híd teherbíró képességénél több megkötést, közösen megegyeztünk, hogy noha ezek nem túl rossz javaslatok, próbáljuk egy kicsit körültekintőbben vizsgálni a feladatot.

Számolásos megközelítés

Ez nyilvánvalóan nem egy absztrakt matematikai probléma, de a matematika segít az áttekinthető megfogalmazásban, a kérdés megválaszolásában. Számoljunk egy kicsit! – próbáltam más útra terelni az osztályt. Ekkor azonnal rájöttek, hogy csak egy tojás lehet nála, és azt át is tudná vinni, utána pedig visszajönne a másikért. Igen ám, de a feladat szerint csak egyszer haladhat át a hídon – ábrándítottam ki a megoldókat. Hát, akkor nincs megoldás – válaszolták kórusban. Hol lehet még a tojás, ha nem az embernél? – próbálkoztam egy sugalmazó kérdéssel. Ekkor valaki rájött, hogy egy tojásnak mindig a levegőben kellene lennie. És ez hogyan lehetséges? – próbáltam továbblendíteni. Ekkor már többen rájöttek, hogy felváltva kell dobálni a tojásokat.

Vagyis közösen felfedeztük a *bivatkozott folyóirat megfjtését*: „Egy kis humorral és az apuka részéről egy kis kezűgyességgel, úgy jár el, mint a cirkuszban: amíg a hídon halad át, felváltva fel-fel dobja (és persze ki is fogja) az egyik tojást (*zsonglőrködik*), így a kezében mindig csak egy 50 g-os tojás van, és a 69,950 kg saját tömegével éppen 70 kg »halad át« a hídon.” [1] Az első olvasásra ötletesnek tűnő megoldáson fellelkesülve azonban ne próbáljunk meg azonnal átmenni a hídon!

Mi lenne, ha most ellenőriznénk a megoldást úgy, mint matekórán, „visszahelyettesítenénk a valóságba”, vagyis az egészet eljátsszanánk két almával, és közben mérnék az almadobáló súlyát? – javasoltam ismét. Irány a szertár és már elő is került egy mérleg. Akinél volt alma az végezte a kísérletet. Először megmértük a

kísérlet végrehajtó tanuló súlyát alma nélkül, majd külön az alma súlyát. Ezt követően jött a kísérlet, és árgus szemekkel figyeltük, hogy mit mutat a mérleg miközben dobja az almát. A váratlan eredmény mindenkit megdöbbentett, mert a mérleg 4 kg-mal mutatott többet. Ez pedig nyilvánvalóan több mint egy alma súlyának megfelelő tömeg. Ezt többször is megismételtük, mert többen nem akarták elhinni.

Fizikai megközelítés

Többen megjegyezték, hogy a mozgás miatt van az egész, hogy itt most van *tömeg* (alma), *erő* (amivel az almát feldobjuk), akkor a jó öreg *Newton* szerint kell, hogy legyen gyorsulás is. Vagyis ez már a fizika területe és ebben a feladatban – nyilván a megoldásban is – bőven van fizika, használhatjuk a fizikai gondolkodásmódot.

Ezután következett a feldobás fázisainak közös elemzése, majd az egyenletek felírása, azok megoldása, ahol bizony elkelt egy kis tanári segítség. Összeségében az alábbi megoldásra jutottunk.

Jancsi és Juliska édesapja nem vette figyelembe a természet (jelen esetben a fizika) törvényeit, ezért ha a fent leírt megoldás szerint jár el, akkor bizony a híd azonnal leszakad alatta. Miért?

Ahhoz, hogy az apa a tojást függőlegesen feldobja, azt fel kell gyorsítani valamilyen sebességre. Ehhez függőleges, felfelé irányuló „tolóerő” kell kifejtenie. A *hatás-ellenhatás törvénye* miatt az erők mindig párosával lépnek fel, így ugyanilyen nagyságú, de ellentétes (lefelé irányuló) erő is keletkezni fog, ami a kézre hat, így ennyivel megnövekszik az apa súlya, de mivel a híd semmilyen többletterhelést nem bír el, természetesen le fog szakadni.

Vizsgáljuk meg, hogy mennyivel növekszik a súlyunk, miközben feldobjuk a kezünkben lévő tojást vagy bármilyen tárgyat!

Az 1. ábra a tojásfeldobás fázisait mutatja, ahol F a tojásra kifejtett „tolóerő”, G_t a tojás/test súlya (pontosan: a tojásra ható nehézségi erő), s_{gy} a tojás gyorsítási/lassítási úthossza (ezalatt hat rá az F erő), s_e a tojás emelkedési/esési úthossza (a gyorsítás megszűntének pozíciójától számítva).

A *szabadesés törvényei* alapján az s_e magasságból elejtett test esetén

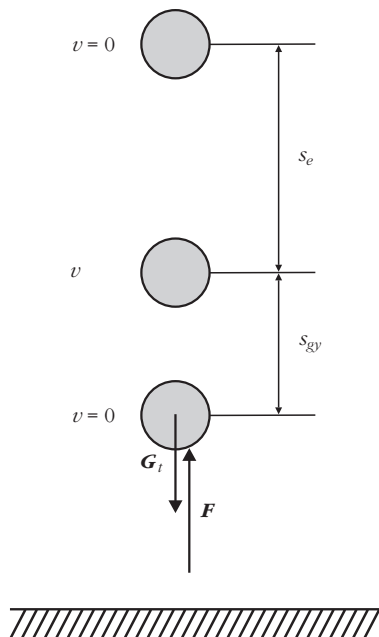
$$s_e = \frac{gt^2}{2}, \quad (1)$$

illetve

$$v = gt, \quad (2)$$

ahol t a repülés/zuhanás ideje. A (2) egyenletről t -t kifejezve és (1)-be behelyettesítve, majd az egyenletet rendezve

$$2gs_e = v^2. \quad (3)$$



1. ábra. A tojásfeldobás fázisai.

A munkatétel alapján a gyorsítási szakaszra viszont írható, hogy az F_{gy} gyorsító erő munkája egyenlő a mozgási energia megváltozásával, azaz

$$F_{gy} s_{gy} = \frac{m v^2}{2}. \quad (4)$$

(3)-at (4)-be behelyettesítve, majd F_{gy} -t kifejezve

$$F_{gy} = \frac{s_e}{s_{gy}} m_t g = \frac{s_e}{s_{gy}} G_t, \quad (5)$$

ahol $m_t g = G_t$ a feldobott test súlya.

A testet ténylegesen gyorsító erő az eredő erő, a testre kifejtett felfelé mutató F tolóerő és a test súlya között az alábbi összefüggés áll fenn.

$$F_{gy} = F - G_t. \quad (6)$$

Ebbe (5)-öt behelyettesítve, F -re az alábbi összefüggés adódik.

$$F = \left(1 + \frac{s_e}{s_{gy}} \right) G_t. \quad (7)$$

Súlyunk tehát éppen ezzel megegyező értékkel, de az F -fel ellentétes irányú, lefelé mutató úgynevezett reakció erő nagyságával növekszik. A ΔG súlynövekedés tehát a feldobott test súlyának (s_e/s_{gy})-szeresével egyenlő.

$$G_t + \Delta G = \left(1 + \frac{s_e}{s_{gy}} \right) G_t. \quad (8)$$

Így a zsonglörködés egy új, eddig nem publikált általános összefüggéséhez jutottunk, és közösen örültünk az új felfedezésnek.

Természetesen a test elkapásakor ugyanekkora lesz a súlynövekedésünk, feltéve, ha az esési, illetve lassítási úthosszak megegyeznek az emelkedési, illetve gyorsítási úthosszakkal.

Ezt követően az osztály egyik zsonglörködni tudó tanulója segítségével – a tanárnak is jól jön néha egy kis tanuló segitség! – tojás helyett almával végeztünk kísérletet, erről videófelvételt készítve, majd a videót visszajátszva és a távolságokat lemérve, az alma helyett a tojás tömegével számolva az alábbi értékek adódtak: $s_{gy} = 10$ cm, $s_e = 40$ cm, $m_t = 50$ g = 0,05 kg; ekkor

$$G_t = m_t g = 0,05 \cdot 10 = 0,5 \text{ N},$$

$$\Delta G = \frac{40}{10} \cdot 0,5 = 4 \cdot 0,5 = 2 \text{ N}.$$

Így a 69,950 kg tömegű apa eredeti 699,5 N súlya a tojás feldobásakor $699,5 + 2,5 = 702$ N lesz, ezt a 700 N teherbírású fahíd nem fogja elbírní, így az mindenképpen leszakad. A problémát tovább elemezve rájöttünk, hogy sajnos a helyzet még ennél is rosszabb. Eddig ugyanis figyelmen kívül hagytuk, hogy az alma vagy tojás feldobásakor még az almánál jóval nagyobb tömegű kezünket is gyorsítani kell, ami szintén súlynövekedést okoz – nem véletlenül mutatott 4 kg-mal többet a mérleg az első próbadozásnál. (Pontos számításnál tehát ezt is figyelembe kell venni.)

Így tehát azt gondolhatnánk, hogy az apának csak egyetlen lehetősége marad: dobálás nélkül, egyenként átvinni a tojásokat a hídon, mert így a tömege egy tojással együtt éppen 70 kg, ami megegyezik a híd teherbírásával. Sajnos a fizika megint közbeszól, ugyanis a normál járás közben – és ezt eddig nem is vettük figyelembe! – a tojás és a testünk súlypontja lefelé jár, ráadásul a nem kis tömegű lábainkat is emelgetni (gyorsítani, lassítani) kell, így súlyunk ezek miatt is olyan mértékben megnövekszik, hogy valójában tojás nélkül sem tudnánk átmenni a 70 kg teherbírású hídon.

Ez a feladat tehát jó példa arra, hogy a valóságban (a természetben) a jelenségek nincsenek tudományterületek szerint szétválasztva, ezt csak az emberi elme teszi azért, hogy egy bonyolultabb jelenséget több szempontból vizsgálva könnyebben megértsünk.

A technika és a műszaki tudományok fejlődése napjainkban a fizika mély ismeretét igényli a későbbiekben e területekre kerülő tehetséges tanulóktól, akik a fizikai ismeretanyagot kellő szakértelemmel tudják összekapcsolni a természet- és műszaki tudományok többi területével.

„A zsonglörködés sokak számára csak bohóckodás, amolyan cirkuszi produkció: tányértáncoltatás, röpködő labdák és buzogányok. Története a távoli múltban kezdődött. A legősibb dokumentált emlék közel négyezer éves: egy zsonglörököt ábrázoló egyiptomi sírkamrarajz a Középső Királyság idejéből. James Cook kapitány felfedezései nyomán pedig azt a meglepő tényt jegyezték fel, hogy Tonga szigetén a lányok mindegyike tudott zsonglörködni, esetenként hat labdával is. A matematikus számára persze a

zsonglörködés – mint sok minden a világon – izgalmas matematikai feladvány, nagyon is komoly dolog. Bármily meglepő, a ma ismert zsonglörmutatványok egy részét matematikusok »találták fel«, nem pedig cirkuszi mutatványosok. 1972-ben a Nemzetközi Zsonglör szövetség elnöke az a *Ronald L. Graham* volt, aki a Magyar Tudományos Akadémia Tiszteleti tagja, 1993-ban az Amerikai Matematikai Társulat elnöke, *Erdős Pál* jó barátja, akivel 30 közös publikációjuk jelent meg.” [2]

Mint a [2] cikk – amelynek elolvasását szintén ajánlom – is rámutat, a zsonglörködés a matematikának is komoly vizsgálati/kutatási területe. Ugyanakkor fizikai szempontból is sok érdekeset tudunk mondani

róla, ráadásul fizikaórán egy mérlegre állva, még ha nem is zsonglörködve – mert még két almával sem olyan könnyű zsonglörködi –, de egyszerűen csak egy almát feldobva és elkapva, a fenti megállapításokat egyszerű súlyméréssel igazolhatjuk, ami igen meggyőző lehet a tanulók számára, rávilágítva arra, hogy ezt a tevékenységet még mélyebben vizsgálhatnánk, mint ahogyan a fentiekben tettük.

Irodalom

1. *Matlap* 7 (2013. szeptember) Kolozsvár, 257. o., F. 60. feladat
2. Czédli Gábor: A III. Béla Gimnáziumtól az egyszerű zsonglör-minták átlagtételéig. *Szeged*, 2007. január 26. <http://www.math.u-szeged.hu/~czedli/publ.pdf/3.Bela1.pdf>